24/03/16

Θεώρημα (Cayley-Hamilton)

Έστω $\mathbb{F}$ σώμα, $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ και $\chi_A(x) \in \mathbb{F}[x]$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.

Τότε $\chi_A(A) = \mathbb{O}_{\nu \times \nu}$

π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ Τότε } \chi_A(x) = \det(A - xI_2)$$

$$= \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 0 & 3-x \end{vmatrix} = x^2 - 4x + 3 \in \mathbb{R}[x]$$

Το θεώρημα λέει ότι $\chi_A(x) = \mathbb{O}_{2\times 2}$, δηλ. ότι $A^2 - 4A + 3I_2 = \mathbb{O}_{2\times 2}$.

(Επαλήθευση

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, \text{ άρα}$$

$$A^2 - 4A + 3I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})$$

#3

3

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\chi_C(x) = \det(C - xI_3) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ -1 & -x & 4 \\ 0 & 2 & 2-x \end{vmatrix} =$$

$= -x^3+3x^2+4x-10$ (μετά τις πράξεις)

Γνωρίζουμε από Θεώρημα (C-H)

$\chi_A(A) = \mathbb{O}_{3\times3}$, άρα

$C^3 - 3C^2 - 4C + 10I_3 = \mathbb{O}_{3\times3}$

$C^{20}(\underbrace{\cancel{C^3-3C^2-4C+10I_3}}_{0}) - C^3(\underbrace{\cancel{C^3-3C^2-4C+10I_3}}_{0}) =$

$- C^3+4C^2+5C+I_3$

Άρα $D = -C^3+4C^2+5C+I_3$

Άρα $D = (-3C^2-4C+10I_3)+4C^2+5C+I_3 =$

$= C^2+C+11I_3 = \begin{bmatrix}11&10&20\\-2&17&9\\-2&-6&25\end{bmatrix}$

(4) $E = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ Βρείτε $\chi_E(x)$,

Δ.ο. $E^n = E^{n-2}+E^2-I_3 \quad \forall\, n \geq 3$

Υπολογίστε E^{100}

Λύση

$$\chi_E(x) = \det(E - xI_3) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} =$$

$$= (1-x)\begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = -(x-1)(x^2-1) = -x^3+x^2+x-1$$

Θέτουμε για $n \geq 3$ $P(n)$ την πρόταση: $E^n = E^{n-2} + E^2 - I_3$. Θ.δ.ο. με επαγωγή ότι $P(n)$ ισχύει $\forall n \geq 3$

Για $n=3$ από Θ. Cayley-Hamilton $\chi_E(E) = \mathbb{O}_{3\times 3}$

$\Rightarrow -E^3 + E^2 + E - I_3 = \mathbb{O}_{3\times 3} \Rightarrow \boxed{E^3 = E + E^2 - I_3}$ (*)

Άρα η $P(3)$ ισχύει

Υποθέτουμε $n \geq 3$ και ότι η $P(n)$ ισχύει. Θ.δ.ο. η $P(n+1)$ ισχύει δηλ. ότι $E^{n+1} = E^{n-1} + E^2 - I_3$

Έχουμε $E^{n+1} = E \cdot E^n \underset{\text{επαγωγ. υποθ.}}{=} E(E^{n-2} + E^2 - I_3) =$

$= E^{n-1} + E^3 - E \underset{(*)}{=} E^{n-1} + E^2 - I_3$ (Άρα η $P(n)$ ισχύει $\forall n$)

→ Υπολογίστε E^{100}

$E^{100} = E^{98} + E^2 - I_3$ Προσθέτοντας κατά μέλη και διαγράφοντας $\Rightarrow$

$E^{98} = E^{96} + E^2 - I_3$

(για $n = 4, 6, 8, 10, \dots, 100$)

$E^{96} = E^{94} + E^2 - I_3$

$\vdots$

$E^8 = E^6 + E^2 - I_3$

$E^6 = E^4 + E^2 - I_3$

$E^4 = E^2 + E^2 - I_3$

$$E^{100} = E^2 + 49(E^2 - I_3) = 50E^2 - 49I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 50 & 1 & 0 \\ 50 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα $49 = 50 - 1$ το πλήθος

Παρατήρηση. Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$. (Από Θεώρημα Cayley-Hamilton) $\exists$ μη-μηδενικό μονικό πολυώνυμο, το $(-1)^\nu \chi_A(x)$ που μηδενίζει το A (μονική σημαίνει ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου $x^n = 1_{\mathbb{F}}$)

Έστω k ο ελάχιστος βαθμός για τον οποίο υπάρχει μη μηδενικό πολυώνυμο $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $P(A) = 0_{\nu \times \nu}$

Από Θεώρημα Cayley-Hamilton $k \leq \nu$. Επίσης φανερά $k \geq 1$. (αφού τα μη μηδενικά σταθερά πολυώνυμα δεν μηδενίζουν του A). Άρα $1 \leq k \leq \nu$

Ορισμός / Πρόταση

Το μονικό πολυώνυμο $P(x) \in \mathbb{F}[x]$ βαθμού k

με $p(A)=0_{v\times v}$ είναι ΜΟΝΑΔΙΚΟ, λέγεται ελάχιστο πολυώνυμο του A και συμβολίζεται $m_A(x)$.
minimum

Απόδειξη (Μοναδικότητας)

Έστω $p(x), q(x) \in \mathbb{F}[x]$ μη-μηδενικά μονικά με $p(A)=q(A)=0_{v\times v}$. Υποθέτουμε $p(x)\neq q(x)$ και θα βρούμε αντίφαση. Θέτουμε

$h(x)=p(x)-q(x)\in\mathbb{F}[x]$. Αφού $p(x)\neq q(x) \Rightarrow$ $h(x)$ μη μηδενικό

Αφού $p(x), q(x)$ μονικά ιδίου βαθμού $k \Rightarrow$
$\Rightarrow h(x)=p(x)-q(x)$ έχει βαθμό $<k$. Θέτουμε
$\tilde{h}(x) = c^{-1}h(x)$ όπου c ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $h(x)$. Τότε

i) $\tilde{h}(x)$ μονικό

ii) $\tilde{h}(A) = c^{-1}h(A) = c^{-1}(p(A)-q(A)) = c^{-1}(0_{v\times v}-0_{v\times v}) = 0_{v\times v}$

iii) Βαθμός $\tilde{h}(x)<k$

Τα i), ii), iii) δίνουν αντίφαση στον ορισμό του k σαν ελάχιστος βαθμός μη μηδενικού μονικού πολυωνύμου που μηδενίζει τον A.

Π.Χ.

i) Αν $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, τότε $\chi_A(x)=\det(A-xI_2)=$

$=\begin{vmatrix}1-x&0\\0&1-x\end{vmatrix}=(x-1)^2$

Ισχυρισμός.

$$m_A(x) = x - 1 \in F[x]$$

Απόδ

Φανερά $p(x) = x - 1$ μη μηδενικό μονικό πολυώνυμο που μηδενίζει τον A γιατί $p(A) = A - 1I_2 = I_2 - I_2 = O_{2\times 2}$. Αφού $\deg p(x) = 1$ και πάντα $\deg m_A(x) \geq 1$ έπεται από την μοναδικότητα ότι

$$m_A(x) = p(x)$$

Π.χ

Έστω $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Έχουμε $\chi_A(x) =$

$= \det(B - I_2) = (x-1)^2$

Θέτουμε $p(x) = (x-1)^2$.

Ισχυρισμός. Το $p(x)$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του B.

Απόδ

Φανερά $p(x) = x^2 - 2x + 1 \in \mathbb{R}[x]$ μη μηδενικό μονικό. Έχουμε $p(x) = \chi_B(x)$. Από θεώρημα C-H $\chi_B(B) = O_{2\times 2} \Rightarrow p(B) = O_{2\times 2}$

Έστω $k = \deg m_B(x)$.

Αφού $p(B) = O_{2\times 2}$ και $\deg p(x) = 2 \Rightarrow k \leq 2$

Για ν.δ.ο $m_B(x) = p(x)$ αρκεί ν.δ.ο $k = 2$, άρα αρκεί ν.δ.ο $k \neq 1$

* Έστω $k = 1$ και $\exists\, c \in \mathbb{R}$ με $m_B(x) = x - c$

Τότε $m_B(B) = O_{2\times 2} \Rightarrow B - cI_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1-c & 1 \\ 0 & 1-c \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, αντίφαση. Άρα

Πρόταση Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ με ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x) \in \mathbb{F}[x]$. Υποθέτουμε $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $q(A) = 0_{\nu \times \nu}$. Τότε το $m_A(x)$ διαιρεί το $q(x)$ στο $\mathbb{F}[x]$

(Με άλλα λόγια αν ένα πολυώνυμο μηδενίζει τον πίνακα A τότε είναι αναγκαστικά πολλαπλάσιο στο $\mathbb{F}[x]$ του ελαχίστου πολυωνύμου του A)

Απόδειξη

Από διαίρεση πολυωνύμων, υπάρχουν $\pi(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$ με

$q(x) = \pi(x) m_A(x) + r(x)$ (*)

και $r(x) = 0$ ή ($r(x) \neq 0$ και $\deg r(x) < \deg m_A(x)$)

Αρκεί ν.δ.ο. $r(x) = 0$, δηλ. $r(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Υποθέτουμε $r(x) \neq 0$. Η (*) δίνει

$q(A) = \pi(A) \cdot m_A(A) + r(A) \Rightarrow 0_{\nu\nu} = \pi(A) 0_{\nu\nu} + r(A)$

$\Rightarrow r(A) = 0_{\nu\times\nu}$

Θέτουμε $\tilde{r}(x) = c^{-1} r(x)$, όπου c ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $r(x)$. Τότε $\tilde{r}(x)$ μη μηδενικό, μονικό μηδενίζει τον A και έχει βαθμό γνήσια μικρότερο του βαθμού του $m_A(x)$

Αντίφαση. Άρα $r(x) = 0$

Πόρισμα 1.

Έστω $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ τ.α.ε.ι.

i) $q(A) = \mathbb{O}_{\nu\times\nu}$

ii) Το $q(x)$ είναι πολλαπλάσιο του $m_A(x)$ στο $\mathbb{F}[x]$

Πόρισμα 2

Έχουμε ότι το $m_A(x)$ διαιρεί το $\chi_A(x)$ στο $\mathbb{F}[x]$

Απόδ.

Από ~~Θε~~ Θεώρημα C-H $\chi_A(A) = \mathbb{O}_{\nu\times\nu}$. Το συμπέρασμα έπεται από το Πόρισμα 1.

Πρόταση (Χωρίς απόδειξη)

Κάθε ανάγωγος παράγοντας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(x)$ είναι ανάγωγος παράγοντας και του ελαχίστου $m_A(x)$

Με άλλα λόγια, έστω $\mathbb{F}$ σώμα, $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και

$$\chi_A(x) = (-1)^{\nu}\cdot(p_1(x))^{k_1}(p_2(x))^{k_2}\cdots(p_t(x))^{k_t}$$

όπου $p_i(x)$ ανάγωγα μονικά διαφορετικά ανά δύο ($p_i(x) \neq p_j(x)$ για $i \neq j$) και $k_i \geq 1$ ακέραια.

Τότε υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$, με $1 \leq \lambda_i \leq k_i$ $\forall i = 1, 2, \ldots$ και $m_A(x) = (p_1(x))^{\lambda_1}(p_2(x))^{\lambda_2}\cdots(p_t(x))^{\lambda_t}$

Π.χ. Είδαμε για $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ $\chi_A(x) = (x-1)^2$ και $m_A(x) = x-1$

για $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$\chi_B(x) = (x-1)^2$ και $m_B(x) = (x-1)^2$ Άρα γενικά, το
$\chi_A(x)$ δεν προσδιορίζει μονοσήμαντα το ελάχιστο.

Π.χ

Έστω $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ με $\chi_A(x) = -(x-2)(x-3)^3(x^2+2)^2$

ανάγωγο στο $\mathbb{R}$

Ποια είναι τα πιθανά $m_A(x)$;

Λύση Από πρόταση, αφού $x^2+2 \in \mathbb{R}[x]$ είναι ανάγωγο, από την πρόταση υπάρχουν a, b με $1 \le a \le 2$, $1 \le b \le 2$ ώστε $m_A(x) = (x-2)(x-3)^a(x^2+2)^b$

4 πιθανά ελάχιστα $m_A(x)$

$$\begin{cases} m_A(x) = (x-2)(x-3)(x^2+2), \\ m_A(x) = (x-2)(x-3)(x^2+2)^2 \\ m_A(x) = (x-2)(x-3)^2(x^2+2) \\ m_A(x) = (x-2)(x-3)^2(x^2+2)^2 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Π.χ}}$

Έστω $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ με $m_A(x) = (x-1)(x-3)^2$

Ποια είναι τα πιθανά $\chi_A(x)$;

Λύση

Από πρόταση και αφού $\deg \chi_A(x) = 5$, έπεται ότι $\exists\, a, b \in \mathbb{Z}$, με $a \ge 1$, $b \ge 2$ και $a+b=5$ ώστε
$\chi_A(x) = -(x-1)^a(x-3)^b$

Δυνατά a, b $\Rightarrow a=3, b=2 \rightsquigarrow \chi_A(x) = -(x-1)^3(x-3)^2$

" $\Rightarrow a=2, b=3 \rightsquigarrow \chi_A(x) = -(x-1)^2(x-3)^3$

$a=1, b=4 \rightsquigarrow \chi_A(x) = -(x-1)(x-3)^4$

Πρόταση (Χωρίς απόδειξη)

Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ Τ.Α.Ε.Ι.

i) A διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{F}$

ii) Το $m_A(x)$ αναλύεται στο $\mathbb{F}[x]$ σαν γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων

π.χ.

Αν το $m_A(x) = (x-1)(x^2+2) \in \mathbb{R}[x]$

Όχι διαγωνίσιμος γιατί μη πρωτοβάθμιος παράγοντας

Αν $m_A(x) = (x-1)(x-2)(x-1)$ όχι διαγωνίσιμος, γιατί $(x-1)^2$ εμφανίζεται

$m_A(x) = (x-a)(x-c)$ διαγων. γιατί $a \neq c$